

Généralisation des congruences de Wolstenholme et de Morley

Farid Bencherif et Rachid Boumahdi

Laboratoire LA3C USTHB, Fac. Math. P.B. 32, El Alia, 16111, Algiers, Algeria.

fbencherif@gmail.com, r_boumahdi@esi.dz

Abstract

Dans cet article, nous prouvons que pour tout nombre premier impair p et pour tout p -entier α , on a

$$\binom{\alpha p - 1}{p - 1} \equiv 1 - \alpha(\alpha - 1)(\alpha^2 - \alpha - 1)p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} + \alpha^2(\alpha - 1)^2 p^2 \sum_{1 \leq i < j \leq p-1} \frac{1}{ij} \pmod{p^m}.$$

où $m = 7$ si $p \neq 7$ et $m = 6$ si $p = 7$.

Cette congruence généralise les congruences de Wolstenholme, Morley, Glaisher, Carlitz, McIntosh, Tauraso et Meštrović. Elle permet aussi de retrouver simplement des congruences dues à Glaisher, Carlitz et Zhao.

Mathematics Subject Classification (2010) 11A107, 11B68

Keywords. Wolstenholme's congruence, Morley's congruence, central binomial coefficient.

1 Introduction

Dans tout ce qui suit p désigne un nombre premier impair.

En 1819, Babbage [1] prouve que pour tout nombre premier $p \geq 3$, on a

$$\binom{2p-1}{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}.$$

En 1862, Wolstenholme [16] et [[7], p. 89] prouve que pour tout nombre premier $p \geq 5$, on a les deux congruences suivantes:

$$\binom{2p-1}{p-1} \equiv 1 \pmod{p^3}, \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} \equiv 0 \pmod{p^2}.$$

En 1895, Morley [13] prouve que

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} \binom{p-1}{\frac{p-1}{2}} \equiv 4^{p-1} \pmod{p^3} \quad p \geq 5. \tag{2}$$

En 1900, Glaisher [[5], p. 21], [[6], p. 323] prouve que pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\binom{np-1}{p-1} \equiv 1 \pmod{p^3}, \quad p \geq 5 \tag{3}$$

$$\binom{np-1}{p-1} \equiv 1 - \frac{1}{3}n(n-1)p^3 B_{p-3} \pmod{p^4}, \quad p \geq 5. \tag{4}$$

Les nombres de Bernoulli B_n étant définis par leur série génératrice

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}.$$

En 1900 Glaisher prouve que

$$\binom{2p-1}{p-1} \equiv 1 + 2p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} \pmod{p^4} \quad p \geq 3.$$

En 1953, Carlitz [[2] et [3]] amliore la congruence de Morley en prouvant que

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} \binom{p-1}{\frac{p-1}{2}} \equiv 4^{p-1} + \frac{p^3}{12} B_{p-3} \pmod{p^4} \quad p \geq 5.$$

En 1995, R.J. McIntosh [[10], p. 385] prouve que

$$\binom{2p-1}{p-1} \equiv 1 - p^2 \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^2} \pmod{p^5} \quad p \geq 7. \quad (5)$$

En 2007, Zhao [17] prouve que

$$\binom{2p-1}{p-1} \equiv 1 + 2p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} \pmod{p^5} \quad p \geq 7. \quad (6)$$

En 2010, Tauraso [15] prouve que

$$\binom{2p-1}{p-1} \equiv 1 + 2p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} + \frac{2}{3} p^3 \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^3} \pmod{p^6} \quad p \geq 7. \quad (7)$$

et

$$\binom{2p-1}{p-1} \equiv 1 - 2p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} - 2p^2 \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^2} \pmod{p^6} \quad p \geq 7. \quad (8)$$

En 2014, Meštrović [11] prouve que

$$\binom{2p-1}{p-1} \equiv 1 - 2p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} + 4p^2 \sum_{1 \leq i < j \leq p-1} \frac{1}{ij} \pmod{p^7} \quad p \geq 11. \quad (9)$$

La congruence 9 est encore gnralisée par J. Rosen [14].

2 Enoncé du rsultat principal

Le throrème suivant constitue à la fois une gnralisation de la congruence de Wolstenholme et de la congruence de Morley. En exploitant la relation suivante qui découle du (lemme 9)

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} \binom{p-1}{\frac{p-1}{2}} = 4^{p-1} \binom{\frac{1}{2}p-1}{p-1}. \quad (10)$$

Il permet aussi de retrouver toutes les nombreuses gnralizaciones de ces deux congruences que l'on a exposé au premier paragraphe et aussi d'en découvrir d'autres.

Theorem 1 *Pour tout nombre premier impair p et pour tout p -entier α , on a*

$$\binom{\alpha p-1}{p-1} \equiv 1 - \alpha(\alpha-1)(\alpha^2 - \alpha - 1)p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} + \alpha^2(\alpha-1)^2 p^2 \sum_{1 \leq i < j \leq p-1} \frac{1}{ij} \pmod{p^m}. \quad (11)$$

où $m = 7$ si $p \neq 7$ et $m = 6$ si $p = 7$.

Pour $\alpha = 2$ et pour $\alpha = \frac{1}{2}$, le throrème 1 permet d'obtenir le corollaire suivant:

Corollaire 2 Pour tout nombre premier impair p , on a

$$\binom{2p-1}{p-1} \equiv 1 - 2p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} + 4p^2 \sum_{1 \leq i < j \leq p-1} \frac{1}{ij} \pmod{p^m} \quad (12)$$

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} \binom{p-1}{\frac{p-1}{2}} \equiv 4^{p-1} \left(1 - \frac{5}{16}p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{16}p^2 \sum_{1 \leq i < j \leq p-1} \frac{1}{ij} \right) \pmod{p^m} \quad (13)$$

où $m = 7$ si $p \neq 7$ et $m = 6$ si $p = 7$.

On constate ainsi que le théorème 1 est bien une généralisation des congruences de Wolstenholme (1) et de Morley(2). En effet ces deux congruences se déduisent respectivement de (12) et (13) en observant qu'on a d'après (36) pour $m = 1$ et (35) pour $m = 2$

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} \equiv 0 \pmod{p^2} \quad \text{et} \quad \sum_{1 \leq i < j \leq p-1} \frac{1}{ij} \equiv 0 \pmod{p}, \quad p \geq 5. \quad (14)$$

On en déduit aussi du théorème 1 et de (14) le corollaire suivant qui généralise aux p -entiers, la congruence de Glaisher (3).

Corollaire 3 Pour tout p -entier α , on a

$$\binom{\alpha p - 1}{p - 1} \equiv 1 \pmod{p^3}, \quad p \geq 5. \quad (15)$$

On déduit du théorème 1 les deux relations suivantes

$$\binom{2p-1}{p-1} \equiv 1 - 2p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} + 4p^2 \sum_{1 \leq i < j \leq p-1} \frac{1}{ij} \pmod{p^6}, \quad (16)$$

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} \binom{p-1}{\frac{p-1}{2}} \equiv 4^{p-1} \left(1 - \frac{5}{16}p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{16}p^2 \sum_{1 \leq i < j \leq p-1} \frac{1}{ij} \right) \pmod{p^6}. \quad (17)$$

Comme on a

$$\sum_{1 \leq i < j \leq p-1} \frac{1}{ij} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^2},$$

on en déduit de (14) que

$$p^2 \sum_{1 \leq i < j \leq p-1} \frac{1}{ij} \equiv -\frac{1}{2}p^2 \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^2} \pmod{p^6}.$$

Compte tenu de cette dernière relation, on déduit du théorème 1 le corollaire suivant

Corollaire 4 Pour tout nombre premier impair p et pour tout p -entier α , on a

$$\binom{\alpha p - 1}{p - 1} \equiv 1 - \alpha(\alpha - 1)(\alpha^2 - \alpha - 1)p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\alpha^2(\alpha - 1)^2p^2 \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^2} \pmod{p^6} \quad (18)$$

Pour $\alpha = 2$ et $\alpha = \frac{1}{2}$ ce corollaire nous fournit les deux relations suivantes

$$\binom{2p-1}{p-1} \equiv 1 - 2p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} - 2p^2 \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^2} \pmod{p^6}. \quad (19)$$

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} \binom{p-1}{\frac{p-1}{2}} \equiv 4^{p-1} \left(1 - \frac{5}{16}p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{32}p^2 \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^2} \right) \pmod{p^6}. \quad (20)$$

De la relation (18) et du lemme 13, on déduit le corollaire suivant

Corollaire 5

$$\binom{\alpha p - 1}{p - 1} \equiv 1 - \frac{1}{3}\alpha(\alpha - 1)p^3 B_{p-3} \pmod{p^4} \quad (21)$$

(21) est une généralisation de la congruence de Glaisher (4).

Pour $m = 1$, la relation (41) implique

$$2p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} + p^2 \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^2} \equiv 0 \pmod{p^5} \quad p \geq 7. \quad (22)$$

On déduit de (20) et (18) le corollaire suivant

Corollaire 6 *Pour tout p -entier α , on a*

$$\binom{\alpha p - 1}{p - 1} \equiv 1 + \alpha(\alpha - 1)p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} \pmod{p^5} \quad p \geq 7, \quad (23)$$

$$\binom{\alpha p - 1}{p - 1} \equiv 1 - \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 1)p^2 \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^2} \pmod{p^5} \quad p \geq 7. \quad (24)$$

Pour $\alpha = 2$, la relation (24) permet de retrouver la congruence de R.J. McIntosh (5) et la relation (23) permet de retrouver la congruence de Zhao (6). De plus pour $\alpha = \frac{1}{2}$, les relations (19) et (20) permettent d'obtenir le corollaire suivant

Corollaire 7 *On a*

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} \binom{p-1}{\frac{p-1}{2}} \equiv 4^{p-1} \left(1 - \frac{1}{4}p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} \right) \pmod{p^5} \quad p \geq 7, \quad (25)$$

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} \binom{p-1}{\frac{p-1}{2}} \equiv 4^{p-1} \left(1 + \frac{1}{8}p^2 \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^2} \right) \pmod{p^5} \quad p \geq 7. \quad (26)$$

A l'aide de la relation (42) du lemme 12, écrite pour $m = 1$, on déduit que l'on a

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2}p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{6}p^2 \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^3} \equiv 0 \pmod{p^6} \quad p \geq 11. \quad (27)$$

Avec (18) et (27), on déduit le corollaire suivant.

Corollaire 8 *Pour tout nombre premier impair $p \geq 11$ et pour tout p -entier α , on a*

$$\binom{\alpha p - 1}{p - 1} \equiv 1 + \alpha(\alpha - 1)p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{6}\alpha^2(\alpha - 1)^2 p^3 \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^3} \pmod{p^6}.$$

Pour $\alpha = 2$ et $\alpha = \frac{1}{2}$, ce corollaire nous fournit les deux congruences suivantes vérifiées pour $p \geq 11$,

$$\binom{2p - 1}{p - 1} \equiv 1 + 2p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} + \frac{2}{3}p^3 \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^3} \pmod{p^6},$$

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} \binom{p-1}{\frac{p-1}{2}} \equiv 4^{p-1} \left(1 - \frac{1}{4}p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{96}p^3 \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^3} \right) \pmod{p^6}.$$

Le théorème 1 généralise aux p -entiers, la relation (9) de Meštrović.

3 Lemmes

Lemme 9 Pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$(-1)^n \binom{2n}{n} = 4^{2n} \binom{n - \frac{1}{2}}{2n} \quad (28)$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} 4^{2n} \binom{n - \frac{1}{2}}{2n} &= \frac{4^{2n}}{(2n)!} \prod_{k=1}^{2n} \left(n + \frac{1}{2} - k\right) \\ &= \frac{2^{2n}}{(2n)!} \prod_{k=1}^{2n} (2n + 1 - 2k) \\ &= (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} \prod_{k=1}^n (2(n + 1 - k) - 1) \prod_{k=n+1}^{2n} (2(k - n) - 1), \end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire

$$4^{2n} \binom{n - \frac{1}{2}}{2n} = (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} \left(\prod_{k=1}^n (2j - 1) \right)^2. \quad (29)$$

On constate alors que

$$\prod_{k=1}^n (2j - 1) = \frac{\prod_{j=1}^n (2j) \cdot \prod_{j=1}^n (2j - 1)}{\prod_{j=1}^n (2j)} = \frac{(2n)!}{2^n n!} \quad (30)$$

Il résulte de (29) et (30) que

$$\begin{aligned} 4^{2n} \binom{n - \frac{1}{2}}{2n} &= (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} \left(\frac{(2n)!}{2^n n!} \right)^2 \\ &= (-1)^n \frac{(2n)!}{n! n!} = (-1)^n \binom{2n}{n}. \end{aligned}$$

En choisissant $n = \frac{p-1}{2}$ dans (28), on obtient la relation (10). ■

Pour tout nombre premier p et pour tout entier k , nous définissons les nombres harmoniques généralisés H_m par

$$H_m = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_m \leq p-1} \frac{1}{k_1 \dots k_m}, \quad \text{pour } 1 \leq m \leq p-1$$

et par convention

$$H_0 = 1 \text{ et } H_m = 0 \text{ pour } m \geq p. \quad (31)$$

Soit $P(x)$ le polynôme défini par

$$P(x) = \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-p+1)}{(p-1)!}, \quad (32)$$

On a alors

$$\begin{aligned} P(x) &= (-1)^{p-1} \prod_{k=1}^{p-1} \frac{k-x}{k} \\ &= \prod_{i=1}^{p-1} \left(1 - \frac{x}{k}\right). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$P(x) = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k H_k x^k. \quad (33)$$

La preuve du théorème principal repose essentiellement sur le lemme suivant

Lemme 10 *Pour tout nombre premier p impair et pour tout entier $m \geq 1$, on a*

1.

$$H_{2m-1} - mpH_{2m} = \frac{1}{2}p^2 \sum_{k=2m+1}^{p-1} (-1)^k \binom{k}{2m-1} p^{k-2m-1} H_k, \quad (34)$$

2.

$$H_m \equiv 0 \pmod{p}, \text{ pour } m \neq p-1, \quad (35)$$

3.

$$H_m \equiv 0 \pmod{p^2}, \text{ pour } m \text{ impair et } m \neq p-2, \quad (36)$$

4.

$$H_{2m-1} - mpH_{2m} \equiv 0 \pmod{p^4}, \text{ pour } 2m+1 \neq p-2. \quad (37)$$

Preuve.

1. La relation (32) nous permet de constater que l'on a

$$P(x) = P(p-x),$$

ce qui peut s'écrire, en exploitant la relation (33) et la convention (31):

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k H_k x^k = \sum_{k \geq 0} (-1)^k H_k (p-x)^k. \quad (38)$$

En identifiant coefficients de x^{2m-1} dans chacun des deux membres de (38), on obtient

$$\begin{aligned} -H_{2m-1} &= \sum_{k \geq 0} (-1)^k H_k \binom{k}{2m-1} p^{k-2m+1} (-1)^{2m-1} \\ &= - \sum_{k=2m-1}^{p-1} (-1)^k \binom{k}{2m-1} p^{k-2m+1} H_k \\ &= H_{2m-1} - 2mpH_{2m} - p^2 \sum_{k=2m+1}^{p-1} (-1)^k \binom{k}{2m-1} p^{k-2m-1} H_k. \end{aligned}$$

La relation (34) en résulte. Remarquons qu'on déduit de cette relation que $H_{2m-1} \equiv 0 \pmod{p}$ pour tout $m \geq 1$.

2. Il s'agit d'un résultat bien connu qu'on peut déduire facilement du fait que le polynôme $P(x)$ considéré comme un polynôme à coefficients dans le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ s'écrit grâce au petit théorème de Fermat $P(x) = 1 - x^{p-1}$. On en déduit aussi que $H_{p-1} = \frac{1}{(p-1)!} \equiv -1 \pmod{p}$.

3. D'après la relation (34), on a

$$H_{2m-1} \equiv mpH_{2m} \pmod{p^2}. \quad (39)$$

On a alors $H_{2m-1} \equiv 0 \pmod{p^2}$ pour $2m-1 \neq p-2$ car on a $H_{2m} \equiv 0 \pmod{p}$ d'après (35). Remarquons que si $2m-1 = p-2$, on a $H_{2m-1} = H_{p-2} \equiv \frac{p-1}{2} pH_{p-1} \equiv \frac{p}{2} \pmod{p^2}$.

4. D'après la relation (34), on a

$$H_{2m-1} - mpH_{2m} \equiv -\frac{1}{2}p^2 \binom{2m+1}{2} H_{2m+1} + \frac{1}{2}p^3 \binom{2m+2}{3} H_{2m+2} \pmod{p^4}. \quad (40)$$

Si $2m+1 \neq p-2$, on a alors $2m+2 \neq p-1$ et on déduit de (36) et (35) que $H_{2m+1} \equiv 0 \pmod{p^2}$ et $H_{2m+2} \equiv 0 \pmod{p}$. En tenant compte de ces deux dernières congruences dans (40), la relation (37) en résulte.

■

Remarque 11 Il est facile de prouver à l'aide de la relation (40) que si $2m+1 = p-2$, alors .

$$H_{2m-1} - mpH_{2m} = H_{p-4} - \left(\frac{p-3}{2}\right)pH_{p-3} \equiv -\frac{p^3}{4} \pmod{p^4}.$$

Ainsi, pour tout $m \geq 1$, on a $H_{2m-1} - mpH_{2m} \equiv 0 \pmod{p^3}$.

Lemme 12 Pour tout entier $m \geq 1$, on a

1.

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^m} \equiv \begin{cases} 0 \pmod{p} & \text{si } p-1 \nmid m \\ -1 \pmod{p} & \text{si } p-1 \mid m \end{cases}.$$

2.

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^m} \equiv \begin{cases} 0 \pmod{p^2} & \text{si } m \text{ est impair et } p-1 \nmid m+1 \\ \frac{1}{2}mp \pmod{p^2} & \text{si } m \text{ est impair et } p-1 \mid m+1 \end{cases}.$$

3. Pour m impair, on a

$$2 \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^m} + mp \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^{m+1}} \equiv \begin{cases} \equiv 0 & \pmod{p^3} \\ \equiv 0 & \pmod{p^4} \\ \equiv -\frac{1}{12}m(m+1)(m+2)p^3 \pmod{p^4} \end{cases} \begin{matrix} \text{si } p-1 \nmid m+3 \\ \text{si } p-1 \mid m+3 \end{matrix} \quad (41)$$

4. Pour m impair, on a

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^m} + \frac{1}{2}mp \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^{m+1}} + \frac{m(m+1)}{12}p^2 \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^{m+2}} \equiv 0 \pmod{p^6} \quad \text{si } p-1 \nmid m+5. \quad (42)$$

Preuve.

1. Soit $g \in \mathbb{Z}$ tel que \bar{g} soit un générateur du groupe cyclique $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. L'application $x \rightarrow x^{-1}$ de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ dans lui-même étant bijective, on a

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^m} \equiv \sum_{k=1}^{p-1} k^m \equiv \sum_{j=0}^{p-2} (g^j)^m \equiv \sum_{j=0}^{p-2} (g^m)^j \equiv 0 \pmod{p}.$$

On a alors

$$(g^m - 1) \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^m} \equiv (g^m - 1) \sum_{j=0}^{p-2} (g^m)^j = (g^m)^{p-1} - 1 = (g^{p-1})^m - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

On en déduit que si $p-1 \nmid m$, on a $g^m - 1 \not\equiv 0 \pmod{p}$ et $\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^m} \equiv 0 \pmod{p}$.

Si $p-1 \mid m$, on a $\frac{1}{k^m} \equiv 1 \pmod{p}$ pour $1 \leq k \leq p-1$ et $\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^m} \equiv \sum_{k=1}^{p-1} 1 = p-1 \equiv -1 \pmod{p}$.

2. Pour m impair, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^m} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^m} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{(p-k)^m} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(p-k)^m + k^m}{k^m(p-k)^m} \equiv -\frac{1}{2}mp \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^{m+1}} \pmod{p^2}. \end{aligned} \quad (43)$$

Si $p-1 \nmid m+1$, on a $\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^{m+1}} \equiv 0 \pmod{p}$ et (43) implique $\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^m} \equiv 0 \pmod{p^2}$.

Si $p-1 \mid m+1$; alors $\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^{m+1}} \equiv -1 \pmod{p}$ et (43) implique $\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^m} \equiv \frac{1}{2}mp \pmod{p^2}$.

3. On a pour $1 \leq k \leq p-1$

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{p}{k}\right)^m} \equiv 1 + m \frac{p}{k} + \frac{m(m+1)}{2} \frac{p^2}{k^2} + \frac{m(m+1)(m+2)}{6} \frac{p^3}{k^3} \pmod{p^4}.$$

On en déduit que pour m impair, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{(p-k)^m} &= - \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^m \left(1 - \frac{p}{k}\right)^m} \\ &\equiv \sum_{k=1}^{p-1} \left(-\frac{1}{k^m} - m \frac{p}{k^{m+1}} - \frac{m(m+1)}{2} \frac{p^2}{k^{m+2}} - \frac{m(m+1)(m+2)}{6} \frac{p^3}{k^{m+3}} \right) \pmod{p^4}. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^m} &= \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^m} + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{(p-k)^m} \\ &\equiv -mp \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^{m+1}} - \frac{m(m+1)}{2} p^2 \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^{m+2}} - \frac{m(m+1)(m+2)}{6} p^3 \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^{m+3}} \pmod{p^4} \quad (44) \end{aligned}$$

Or $m+2$ est impair. On a donc $p-1 \nmid m+2$ et $\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^{m+2}} \equiv 0 \pmod{p}$. On déduit alors de (44) que

$$2 \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^m} + mp \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^{m+1}} \equiv 0 \pmod{p^3}.$$

Si $p-1 \nmid m+3$, on a à la fois $\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^{m+2}} \equiv 0 \pmod{p^2}$ et $\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^{m+3}} \equiv 0 \pmod{p}$. Dans ce cas, on déduit de (44) que

$$2 \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^m} \equiv -mp \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^{m+1}} \pmod{p^4}.$$

Si $p-1 \mid m+3$, on a $\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^{m+2}} \equiv \frac{1}{2}(m+2)p \pmod{p^2}$ et $\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^{m+3}} \equiv -1 \pmod{p}$. Dans ce cas, on déduit de (44) que

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^m} + mp \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^{m+1}} &\equiv -\frac{m(m+1)(m+2)}{4} p^3 + \frac{m(m+1)(m+2)}{6} p^3 \\ &\equiv -\frac{1}{12} m(m+1)(m+2) \pmod{p^4}. \end{aligned}$$

4. Si m impair et si $p-1 \nmid m+5$, on a

$$2 \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^m} \equiv -mp \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^{m+1}} - \frac{m(m+1)}{2} p^2 \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^{m+2}} - \frac{m(m+1)(m+2)}{6} p^3 \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^{m+3}} \pmod{p^4}. \quad (45)$$

On a aussi d'après (41)

$$2p^2 \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^{m+2}} + (m+2)p^3 \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^{m+3}} \equiv 0 \pmod{p^6}. \quad (46)$$

On déduit de (45) et (46)

$$2 \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^m} \equiv -mp \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^{m+1}} - \frac{m(m+1)}{2} p^2 \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^{m+2}} + \frac{m(m+1)}{3} p^2 \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^{m+2}} \pmod{p^4}.$$

La relation (42) en résulte.

■

Lemme 13 On a

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} \equiv -\frac{1}{3}p^2 B_{p-3} \pmod{p^3}, \quad p \geq 5 \quad (47)$$

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^2} \equiv \frac{2}{3}p B_{p-3} \pmod{p^2}, \quad p \geq 5. \quad (48)$$

On trouvera dans [8] une preuve très détaillée de la relation (47) qui est un résultat dû à Glaisher [5]. La relation (48) se déduit de (47) et de (41) écrite pour $m = 1$.

4 Preuve du théorème 1

D'après la relation (32), on a

$$\binom{\alpha p - 1}{p - 1} = P(\alpha p) = \sum_{k=0}^{p-1} (-\alpha)^k H_k p^k.$$

On en déduit que

$$\binom{\alpha p - 1}{p - 1} = \sum_{k=0}^4 (-\alpha)^k H_k p^k + (-\alpha)^5 H_5 p^5 + (-\alpha)^6 H_6 p^6 \pmod{p^7}. \quad (49)$$

Or, d'après les relations (35) et (36), on a

$$(-\alpha)^5 H_5 p^5 \equiv 0 \pmod{p^7} \quad \text{et} \quad (-\alpha)^6 H_6 p^6 \equiv 0 \pmod{p^7}, \quad (50)$$

pourvu que $5 \neq p - 2$ et $6 \neq p - 1$, c'est à dire $p \neq 7$. Il suffit donc de choisir $p \geq 11$ pour réaliser ces conditions.

Ainsi pour $p \geq 11$, Il résulte des relations (49) et (50) que l'on a

$$\binom{\alpha p - 1}{p - 1} \equiv \sum_{k=0}^4 (-\alpha)^k H_k p^k \pmod{p^7}. \quad (51)$$

Pour $\alpha = 1$, nous déduisons de (51) la relation

$$\sum_{k=1}^4 (-\alpha)^k H_k p^k \equiv 0 \pmod{p^7}. \quad (52)$$

D'autre part, du fait que $p \geq 11$, on a d'après (37) du lemme,

$$p^3 H_3 - 2p^4 H_4 \equiv 0 \pmod{p^7}. \quad (53)$$

Des relations (51), (52) et (53), on déduit que pour tous p -entiers λ et μ , on a

$$\binom{\alpha p - 1}{p - 1} \equiv \sum_{k=0}^4 (-\alpha)^k H_k p^k + \lambda \left(\sum_{k=1}^4 (-\alpha)^k H_k p^k \right) + \mu (p^3 H_3 - 2p^4 H_4) \pmod{p^7}. \quad (54)$$

Autrement dit, on a

$$\binom{\alpha p - 1}{p - 1} \equiv \sum_{k=0}^4 A_k H_k p^k \pmod{p^7},$$

avec

$$\begin{aligned} A_0 &= 1, \\ A_1 &= -\alpha - \lambda, \\ A_2 &= \alpha^2 + \lambda, \\ A_3 &= -\alpha^3 - \lambda + 11, \\ A_4 &= \alpha^4 + \lambda - 2\mu. \end{aligned}$$

Choisissons λ et μ tels que $A_3 = A_4 = 0$, on obtient

$$\lambda = \alpha^4 - 2\alpha^3 \quad \text{et} \quad \mu = \alpha^4 - \alpha^3.$$

Avec ce choix de λ et μ , la relation (54) devient

$$\binom{\alpha p - 1}{p - 1} \equiv 1 - (\alpha^4 - 2\alpha^3 + \alpha)pH_1 + (\alpha^4 - 2\alpha^3 + \alpha^2)p^2H_2 \pmod{p^7}.$$

Ce qui nous fournit bien la relation (11).

Si $p = 7$, un calcul direct donne

$$\binom{\alpha p - 1}{p - 1} - \left(1 - \alpha(\alpha - 1)(\alpha^2 - \alpha - 1)p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} + \alpha^2(\alpha - 1)^2 p^2 \sum_{1 \leq i < j \leq p-1} \frac{1}{ij} \right) = \frac{\alpha^3(\alpha - 1)^3}{720} 7^6 \equiv 0 \pmod{7^6}$$

et permet de conclure. La preuve du théorème est complète.

References

- [1] C. Babbage, Demonstration of a theorem relating to prime numbers, *Edinburgh Philosophical J.* 1 (1819), 46–49.
- [2] L. Carlitz, A Theorem of Glaisher, *Canadian Journal of Mathematics* **5** (1953):306-316.
- [3] L. Carlitz, Note on a Theorem of Glaisher. *Journal of the London Mathematical Society.* **28** (1953): 245-246.
- [4] J. W. L. Glaisher, Congruences relating to the sums of products of the first n numbers and to other sums and products, *Quart. J. Math.* 31 (1899), 2–35.
- [5] J.W.L. Glaisher, Congruences relating to the sums of products of the first n numbers and to other sums of products, *Q. J. Math.* 31 (1900), 1–35.
- [6] J.W.L. Glaisher, On the residues of the sums of products of the first $p - 1$ numbers, and their powers, to modulus p^2 or p^3 , *Q. J. Math.* 31 (1900), 321–353.
- [7] G.H. Hardy, E.M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Clarendon, Oxford, 1980.
- [8] C. G. Ji, A simple proof of a curious congruence by Zhao, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 133(2005): 3469-3472.
- [9] E. Lehmer, On congruences involving Bernoulli numbers and the quotients of Fermat and Wilson, *Ann. of Math.* (2) 39 (1938) 350–360.
- [10] R.J. McIntosh, On the converse of Wolstenholme's Theorem, *Acta Arith.* 71 (1995), 381–389.
- [11] R. Meštrović, On the mod p^7 determination of $\binom{2p-1}{p-1}$, *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 44 (2), (2014), 633-648.
- [12] R. Meštrović, Wolstenholme's theorem: its generalizations and extensions in the last hundred and fifty years (1862-2012), eprint: arXiv:1111.3057 v2.
- [13] F. Morley, Note on the congruence $2^{4n} \equiv (-)^n(2n)!/(n!)^2$, where $2n + 1$ is a prime, *Ann. of Math.* 9 (1894/95), no. 1-6, 168–170.
- [14] J. Rosen. Multiple harmonic sums and Wolstenholme's theorem. *International Journal of Number Theory*, 9(8):2033–2052, 2013.
- [15] R. Tauraso, More congruences for central binomial coefficients, *J. Number Theory* **130** (2010), 2639–2649.
- [16] J. Wolstenholme, On certain properties of prime numbers, *Quart J. Math.* **5** (1862) 35-39.
- [17] J. Zhao, Bernoulli Numbers, Wolstenholme's theorem, and p^5 variations of Lucas's theorem, *J. Number Theory* 123 (2007), 18–26.